

Modelo de Rutherford

1

- ✓ Supone que toda la carga positiva del átomo, y por lo tanto prácticamente toda su masa, está localizada en una región del espacio pequeña en el centro del átomo. Esta región pequeña se denomina núcleo.
- ✓ Si las dimensiones del núcleo son muy pequeñas, entonces una partícula α que pase muy cerca de él puede ser dispersada a un ángulo grande (al interactuar con un solo átomo) ya que al estar concentrada toda la carga del átomo en el núcleo, la repulsión (debida a esa carga) sobre la partícula α es intensa.
- ✓ Rutherford encontró una expresión para $N(\Phi)d\Phi$ basada en su modelo.
- ✓ Rutherford ignoró las dispersiones debidas a los electrones de los átomos porque estaba interesado en las dispersiones a ángulos mayores a unos cuantos grados. Ya que la masa de los electrones es pequeña comparada con la masa de una partícula α , las desviaciones que causan los electrones a la partícula α corresponden a ángulos muy pequeños ($< 10^{-4}$ rad = 0.01°)

- ✓ La dispersión de la partícula α se debe a la repulsión coulombiana entre la partícula α (cargada positivamente) y el núcleo también cargado positivamente.
- ✓ Se supone que la partícula α es dispersada por un átomo pesado para que el núcleo del átomo (teniendo una masa muy grande comparada con la masa de la partícula α) no retroceda apreciablemente durante el proceso de interacción con la partícula α . Se supone que el núcleo del átomo permanece fijo durante la interacción con la partícula α .
- ✓ Se supone que la partícula α no penetra en el núcleo, por lo que tanto ella como el núcleo (supuestamente esféricos) se comportan (a efecto de la ley de Coulomb) como cargas puntuales.
- ✓ Se utiliza la mecánica no-relativista pues $v/c \sim 1/20$. (v = velocidad de la partícula α)

Mostrar pag. 120 y 121 del Eisberg - Resnick (Español, 1979)

✓ OJO: El ángulo de dispersión que se ha usado hasta ahora Φ se cambia a θ .

$$\Rightarrow N(\Phi) d\Phi = N(\theta) d\theta$$

✓ Demostración fórmula (4.5) (pag. 121)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \operatorname{Sen} \varphi + \frac{D}{2b^2} (\operatorname{Cos} \varphi - 1) \quad (1)$$

Cuando $r \rightarrow \infty$

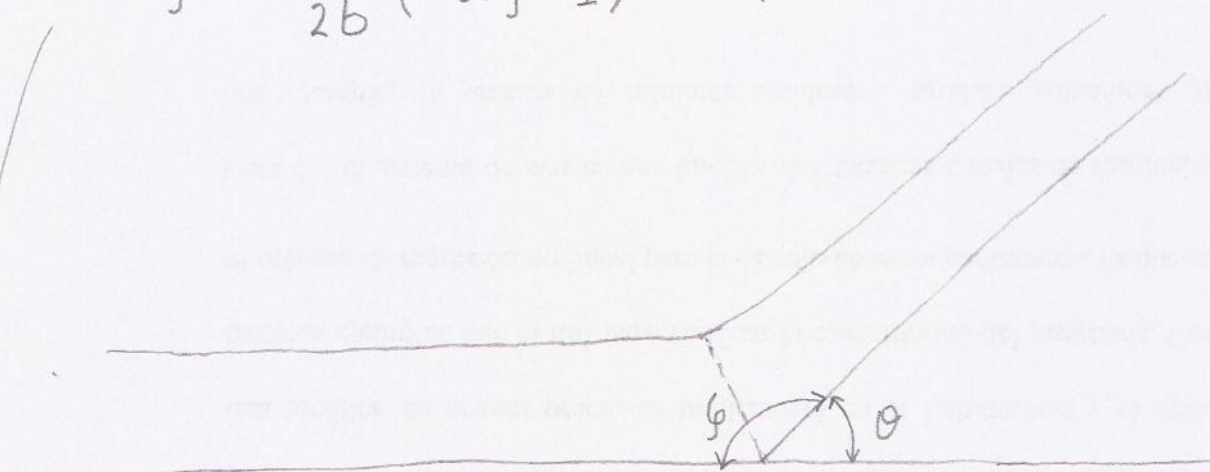
$$\frac{1}{b} \operatorname{Sen} \varphi + \frac{D}{2b^2} (\operatorname{Cos} \varphi - 1) \rightarrow 0 \quad (2)$$

✓ Una solución trivial es $\varphi = 0$ que corresponde a cuando la partícula α se acerca al núcleo pero se encuentra muy lejos de este.

✓ La otra solución es cuando la partícula α se aleja del núcleo y se encuentra muy lejos de éste.
En este caso

$$\frac{1}{b} \operatorname{Sen} \varphi = -\frac{D}{2b^2} (\operatorname{Cos} \varphi - 1) \quad (3)$$

$$\text{Sen } \varphi = -\frac{D}{2b} (\cos \varphi - 1) \quad (4)$$



$$\varphi + \theta = \pi \Rightarrow \varphi = \pi - \theta \quad (5)$$

$$\text{Sen } \varphi = \text{Sen}(\pi - \theta) = \text{Sen } \pi \cos \theta - \text{Sen } \theta \cos \pi = \text{Sen } \theta \quad (6)$$

$$\cos \varphi = \cos(\pi - \theta) = \cos \pi \cos \theta + \text{Sen } \pi \text{Sen } \theta = -\cos \theta \quad (7)$$

$$\text{Sen } \theta = -\frac{D}{b} (-\cos \theta - 1) = \frac{D}{2b} (1 + \cos \theta) \quad (8)$$

$$\cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \text{Sen}^2 \frac{\theta}{2} \quad (9)$$

$$\text{Sen } \theta = 2 \text{Sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \quad (10)$$

$$2 \text{Sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{D}{2b} (1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} - \text{Sen}^2 \frac{\theta}{2})$$

$$\cancel{2 \text{Sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{D}{2b} (\cancel{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}})$$

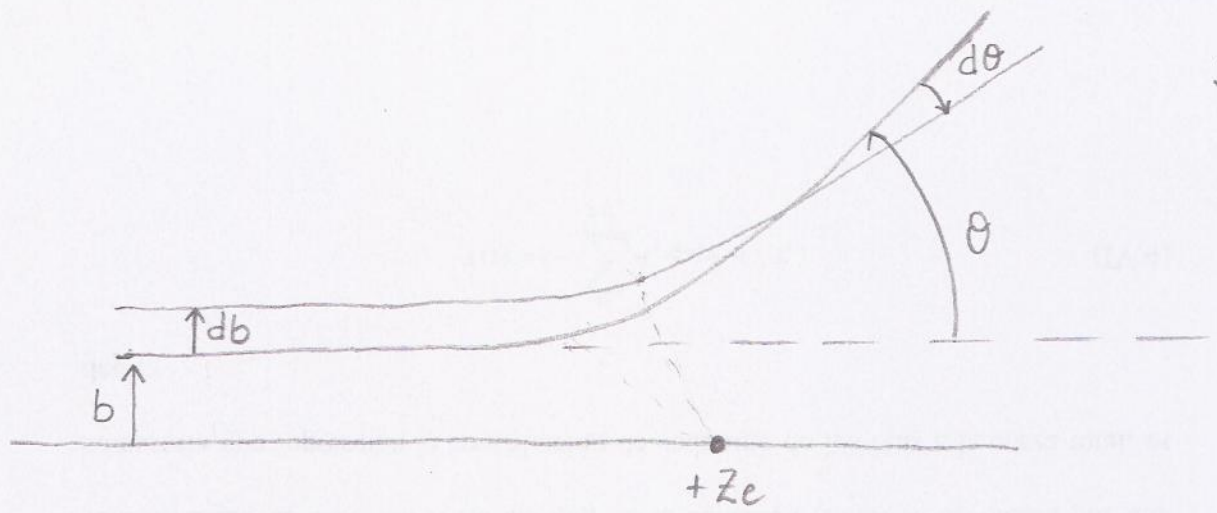
$$\text{Sen} \frac{\theta}{2} = \frac{D}{2b} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\text{Sen} \frac{\theta}{2}} = \frac{2b}{D}$$

$$\Rightarrow \cot \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{2b}{D}$$

✓✓ (11)

Ver Fig. 4.5
(Eisberg - Resnick,
pag. 122)



$$\frac{d(\cot(\theta/2))}{d\theta} = \frac{2}{D} \frac{db}{d\theta}$$

$$-\frac{C \sec^2(\theta)}{2} = \frac{2}{D} \frac{db}{d\theta}$$

$$\frac{d\theta}{db} = -\frac{4}{D} \sin^2(\theta/2) \quad (12)$$

Cuando b aumenta, θ disminuye

$$\text{De (11)} : \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2b}{D}$$

$$\text{Cuando } b=0 \Rightarrow \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \pi$$

\Rightarrow la partícula α retrocede

D es la distancia de máximo acercamiento cuando $b=0$
(choque frontal)

$$\frac{1}{2} M v^2 = \frac{z Z e^2}{4\pi\epsilon_0 D} \quad (13)$$

Energía cinética
inicial de la partícula α

Energía potencial eléctrica
en el pto. de máximo
acercamiento

Ver Ejemplo 4.4, Máximo acercamiento cuando $b \neq 0$

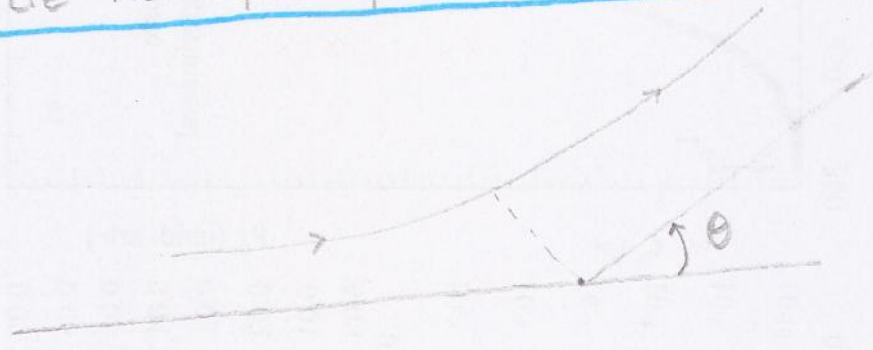
$$R = \frac{D}{2} \left[1 + \frac{1}{\text{Sen}(\theta/2)} \right] \quad (14)$$

Cuando $\theta = \pi \Rightarrow R = D$ } Partícula que incide frontalmente
 (b=0) rebota y se acerca a una distancia D.

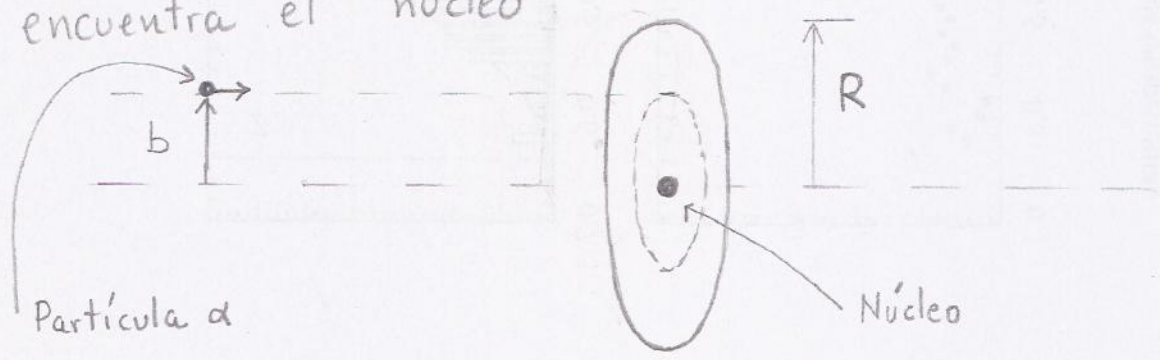
Cuando $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow R \rightarrow \infty$ } Partícula α que pasa lejos del núcleo no es desviada

$\cot(\frac{\theta}{2}) \rightarrow \cot(0) \rightarrow \infty \Rightarrow b \rightarrow \infty$

Expresión de Rutherford para $N(\Phi)d\Phi = N(\theta)d\theta$



- Ⓐ Probabilidad de que la partícula α sea dispersada a un ángulo mayor que θ (por un núcleo)
- ✓ Si se representa hipotéticamente "el campo de acción" de cada núcleo contenido en la lámina por un disco imaginario de radio R en cuyo centro se encuentra el núcleo



7
✓ Si las partículas α inciden uniformemente sobre el "disco de interacción", entonces la fracción de partículas α que inciden sobre "el disco de interacción" con un parámetro de impacto menor o igual a b , serán desviadas a un ángulo mayor o igual a θ , donde

$$\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2b}{D} \quad (15)$$

y esa fracción es igual a

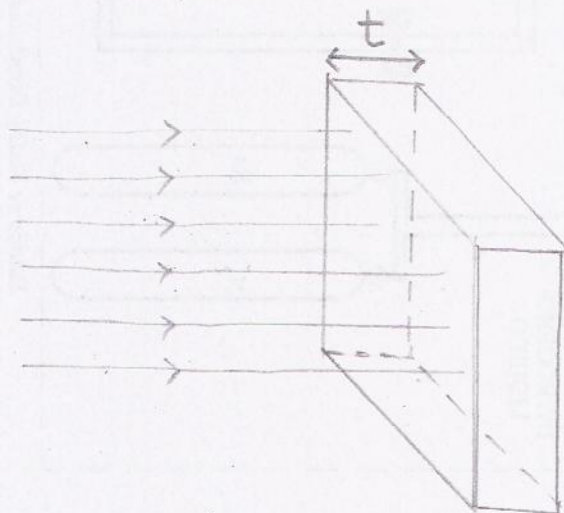
$$f = \frac{\pi b^2}{\pi R^2} = \frac{\text{área de interacción de las partículas } \alpha \text{ que tienen parámetros de impacto menor o igual a } b \text{ (disco de radio } b\text{)}}{\text{área de interacción de todas las partículas } \alpha \text{ que inciden sobre el disco de radio } R}$$

(16)

✓ La fracción f también representa la probabilidad de que una partícula α del haz interactúe con el núcleo teniendo un parámetro de impacto menor o igual a b .

✓ Debido a la ecuación (15), la fracción f también representa la probabilidad de que una partícula α del haz que incide sobre un núcleo sea dispersada a un ángulo mayor o igual a θ .

En realidad el haz de partículas α incide sobre una lámina que tiene un espesor t y una densidad volumétrica de núcleos ρ (# de núcleos por unidad de volumen)



Si A es el área transversal de la lámina, At es su volumen y entonces

$$\rho = \frac{\text{\# total de núcleos contenidos en la lámina}}{At} \quad (17)$$

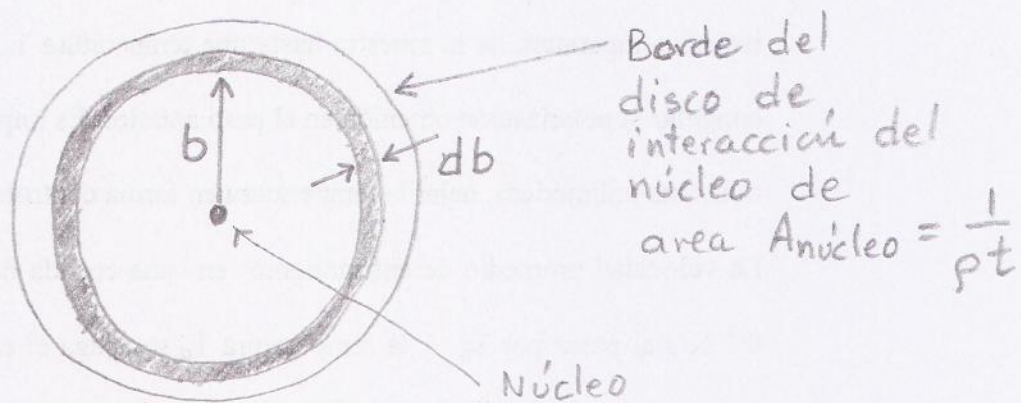
$$\Rightarrow \rho t = \frac{\text{\# total de núcleos}}{A}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{\text{\# total de núcleos}} = \frac{1}{\rho t} \quad (18)$$

$$A_{\text{núcleo}} = \frac{1}{\rho t} \quad (19)$$

$A_{\text{núcleo}}$ = área de interacción de cada núcleo.

Si sobre el área de interacción de un núcleo incide un haz de partículas α uniforme (visto de frente)



La fracción de partículas α que inciden sobre el núcleo (es decir que inciden sobre el disco de interacción del núcleo) teniendo parametros de impacto entre b y $b+db$ será también la fracción de partículas α que serán dispersadas con ángulos entre θ y $\theta+d\theta$ (de acuerdo a la ecuación $\cot(\theta/2) = 2b/D$)

Esa fracción se escribe como

$$df = \frac{\text{área de interacción de las partículas } \alpha \text{ que tienen parámetros de impacto con valores entre } b \text{ y } b+db}{\text{área de interacción de todas las partículas } \alpha \text{ que inciden sobre el núcleo (o el disco de interacción del núcleo)}}$$

$$df = \frac{2\pi b db}{A_{\text{núcleo}}} = \frac{2\pi b db}{\frac{1}{\rho t}} \Rightarrow$$

$$df = \rho t 2\pi b db \quad (20)$$

La fracción df representa también la probabilidad $P(b)db$ de que una partícula α incida sobre un núcleo con un parámetro de impacto con valor entre b y $b+db$, esto es,

$$P(b)db = \rho t 2\pi b db \quad (21)$$

La probabilidad anterior está directamente relacionada con la probabilidad de que la partícula α sea dispersada por un núcleo a un ángulo con valor entre θ y $\theta+d\theta$, $P(\theta)d\theta$, mediante la expresión

$$P(\theta)d\theta = -P(b)db \quad (22)$$

El signo menos se debe a que mientras b disminuye, θ aumenta y viceversa.

Además, la cantidad $P(\theta)d\theta$ puede escribirse como

$$P(\theta)d\theta = \frac{N(\theta)d\theta}{I} \quad (23)$$

$N(\theta)d\theta$ = número de partículas α dispersadas entre θ y $\theta+d\theta$

I = número de partículas α incidentes sobre un núcleo

De (23)

$$N(\theta) d\theta = I P(\theta) d\theta \quad (24)$$

(22) en (23):

$$N(\theta) d\theta = - I P(b) db \quad (25)$$

(21) en (25)

$$N(\theta) d\theta = - I \rho t 2\pi b db \quad (26)$$

Por otro lado $\cot(\frac{\theta}{2}) = \frac{2b}{D} \quad (27)$

$$\Rightarrow b = \frac{D}{2} \cot(\theta/2) \quad (28)$$

$$\Rightarrow \frac{db}{d\theta} = - \frac{D}{2} \left(\frac{1}{2} \text{Csc}^2(\theta/2) \right) \quad (29)$$

(28) y (29) en (26):

$$N(\theta) d\theta = + I \rho t 2\pi \frac{D}{2} \cot(\theta/2) \cdot \frac{D}{4} \text{Csc}^2(\theta/2) d\theta \quad (30)$$

Como $\cot(\theta/2) = \frac{\cos(\theta/2)}{\text{Sen}(\theta/2)} = \frac{\text{Sen}\theta / 2\text{Sen}(\theta/2)}{\text{Sen}(\theta/2)} = \frac{\text{Sen}\theta}{2\text{Sen}^2(\theta/2)} \quad (31)$

$$N(\theta) d\theta = I \rho t \frac{\pi D^2 \text{Sen}\theta d\theta}{8 \text{Sen}^4(\theta/2)} \quad (32)$$

donde $D = (1/4\pi\epsilon_0) z z e^2 / \frac{1}{2} M v^2 \quad (33)$

- ✓ Comparando la expresión (32) del modelo de Rutherford con la expresión basada en el modelo de Thomson, esto es

$$N(\theta)d\theta = \frac{2I\theta}{\theta_{\text{pro}}^2} e^{-\theta^2/\theta_{\text{pro}}^2} d\theta \quad (34)$$

con $\theta_{\text{pro}} = 1^\circ$,

se concluye que a pesar de que ^{en} ambas expresiones el valor de $N(\theta)d\theta$ disminuye a medida que el ángulo de dispersión θ aumenta, el valor que se obtiene para $N(\theta)d\theta$ con el modelo de Rutherford es mayor que el que se obtiene con el modelo de Thomson para ángulos de dispersión grandes.

- ✓ Las dispersiones a ángulos grandes son mucho más probables en una dispersión simple (una sola) por un átomo con núcleo que en dispersiones múltiples (a ángulos pequeños) por un átomo de "pastel de pasas" tipo Thomson. Esto es lo que se comprobaba experimentalmente

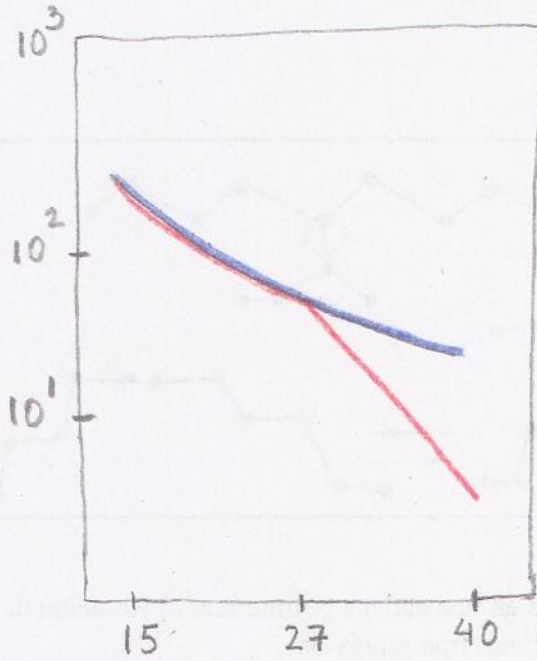
Resultados de Geiger-Marsden (en relación a la expresión (32))

- ✓ Comprobarán (usando laminillas de Ag y Au) la dependencia angular de la ecuación (32) entre $\theta = 5^\circ$ y $\theta = 150^\circ$, a pesar de que, en este rango de ángulos, el valor de $N(\theta)d\theta$ varía en 5 órdenes (10^5) aproximadamente.
- ✓ Para laminillas hechas de distintos elementos, verificarán que $N(\theta)d\theta$ es proporcional al espesor t de la laminilla, usando espesores hasta 10 pulgadas = 25.4 cm
!!! ??
- ✓ Usando partículas α provenientes de distintas fuentes radiactivas, confirmarán que el número de partículas α dispersadas $N(\theta)d\theta$ es inversamente proporcional al cuadrado de la energía cinética $\frac{1}{2}Mv^2$ de la partícula α . Esta confirmación experimental se llevó a cabo con energías cinéticas variando en un factor de 3.
- ✓ En el momento en que Geiger y Marsden hicieron sus experimentos (1909), el valor de Z no era conocido para varios átomos.

En este caso, la ecuación (32) fue usada para determinar el valor de Z . Este valor se encontró que era igual al número atómico de los átomos del blanco (o laminilla) utilizado.

Límites al tamaño del núcleo obtenidos
a partir de la fórmula (32) de Rutherford

Intensidad
dispersada
a $\theta = 60^\circ$



$\alpha + \text{Pb}$

AZUL = Predicción de Rutherford

Krane, Introductory
Nuclear Physics (1988)
Fig. 3.11, pag. 58

15 27 40 Energía cinética de la partícula α (MeV)

- ✓ Cuando la energía de la partícula α es mayor a 27 MeV aproximadamente, deja de cumplirse la predicción de Rutherford (curva azul). Esto ocurre porque a 27 MeV, la partícula α está "tocando" el borde externo del núcleo de plomo (Pb) en este caso.
- ✓ Se puede decir que la energía cinética de la partícula α más alta a la que se cumple la fórmula de Rutherford corresponde al punto donde las curvas azul y roja comienzan a diferenciarse.

Los datos de la figura fueron tomados a $\theta = 60^\circ$ lo cual corresponde a choques no frontales para los que la distancia de máximo acercamiento está dada por

$$R = \frac{D}{2} \left(1 + \frac{1}{\text{Sen}(\theta/2)} \right) \quad (34)$$

donde $D = (1/4\pi\epsilon_0) z Z e^2 / \frac{1}{2} M v^2 \quad (35)$

Al sustituir en (34) y (35) los valores $z=2$ (part. α); $Z=82$ (plomo); $\frac{1}{2} M v^2 \approx 27$ MeV y $\theta = 60^\circ$, encontramos la distancia de máximo acercamiento entre la partícula α y el núcleo de plomo a la que comienza a no aplicarse la fórmula de Rutherford, es decir que R representa el radio del núcleo.

Ver Figura 4.7. para un blanco de aluminio

